AZ-C.P.G.E
CENTRE AL ZAHRAWI
CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ÉCOLES

C.P.G.E
CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ECOLES ABULCASIS

CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE MPSI

2024/2025

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Calculatrices interdites

CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE

nota bene

Les candidats sont informés que la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Exercice

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note D_n l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ et $\sigma(n)$ la somme des éléments de D_n c'est à dire $\sigma(n) = \sum_{d \in D_n} d$.

Exemple : $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : n est premier si, et seulement si, $\sigma(n) = n + 1$.
2. Pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sigma(p^\alpha)$.
3. Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$ telle que $a \wedge b = 1$ et soit f l'application définie par

$$f: \begin{array}{ccc} D_a \times D_b & \longrightarrow & D_{ab} \\ (k,l) & \longmapsto & f(k,l) = kl \end{array}$$

   (a) Montrer que f est injective ; c'est à dire :
   pour tous $(k,l), (k',l')$ de $D_a \times D_b$, on a : $[f(k,l) = f(k',l') \Longrightarrow (k,l) = (k',l')]$.

   (b) Soit $d \in D_{ab}$, on pose $k = d \wedge a$ et $l = d \wedge b$. Montrer que $d = kl$ et conclure que f est bijective.

   (c) En déduire que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

4. En déduire que $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, ..., a_s \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, on a

$$\sigma\left(\prod_{k=1}^{s} a_k\right) = \prod_{k=1}^{s} \sigma(a_k).$$

5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer $\sigma(n)$ à partir de la décomposition en facteurs premiers de n.
   Application : Un entier non nul n est dit parfait lorsque $\sigma(n) = 2n$ (par exemple 6 est un nombre parfait).
6. Montrer que les nombres parfaits pairs sont les nombres d'Euclide ; à savoir les entiers de la forme $E_k = 2^k(2^{k+1} - 1)$ où $k \in \mathbb{N}^*$ avec $2^{k+1} - 1$ premier.

Problème

On rappelle que $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \quad \text{et} \quad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Partie 1 : Définition de la fonction Γ

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $x \geqslant 1$, on pose $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [1, +\infty[, \Gamma_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^n t^{x-1}e^{-t}dt$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n[, n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant (n+1)\ln\left(1-\dfrac{t}{n+1}\right)$.
3. Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}$.
   Montrer que g est une fonction majorée.
4. En déduire que la suite $(\Gamma_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel qu'on notera $\Gamma(x)$.
5. (a) Sachant qu'il existe $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ telle que
   $\forall x > 0, \dfrac{n!}{x(x+1)...(x+n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x+k}$ montrer que
   $$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, a_k = (-1)^k C_n^k.$$
   (b) En déduire que $\forall x \geqslant 1, \Gamma_n(x) = \dfrac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}$.
   (c) En déduire que $\forall x \geqslant 1, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   (d) déterminer $\Gamma(k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2 : Étude locale de Γ en 1

6. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante. Conclure qu'elle est convergente de limite notée γ dite *constante d'Euler*.
7. (a) Montrer que $\forall u \geqslant 0, \ln(1+u) = u - \displaystyle\int_0^u \frac{u-t}{(1+t)^2}dt$.
   (b) En déduire que $\forall u \geqslant 0, |\ln(1+u) - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.
9. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\ln(\Gamma_n(1+\varepsilon)) - \ln(\Gamma_n(1)) = \varepsilon\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\varepsilon}{k} - \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right)\right).$$

CONCOURS D'ENTRÉE EN
PREMIÈRE ANNÉE

nota bene

Les candidats sont informés que la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Exercice

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note D_n l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ et $\sigma(n)$ la somme des éléments de D_n c'est à dire $\sigma(n) = \sum\limits_{d \in D_n} d$.

Exemple : $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : n est premier si, et seulement si, $\sigma(n) = n + 1$.
2. Pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sigma(p^\alpha)$.
3. Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$ telle que $a \wedge b = 1$ et soit f l'application définie par

$$f: \begin{array}{ccc} D_a \times D_b & \longrightarrow & D_{ab} \\ (k, l) & \longmapsto & f(k, l) = kl \end{array}$$

   (a) Montrer que f est injective ; c'est à dire :
   pour tous $(k, l), (k', l')$ de $D_a \times D_b$, on a : $[f(k, l) = f(k', l') \Longrightarrow (k, l) = (k', l')]$.

   (b) Soit $d \in D_{ab}$, on pose $k = d \wedge a$ et $l = d \wedge b$. Montrer que $d = kl$ et conclure que f est bijective.

   (c) En déduire que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

4. En déduire que $\forall s \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, on a

$$\sigma\left(\prod_{k=1}^{s} a_k\right) = \prod_{k=1}^{s} \sigma(a_k).$$

5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer $\sigma(n)$ à partir de la décomposition en facteurs premiers de n.
   Application : Un entier non nul n est dit parfait lorsque $\sigma(n) = 2n$ (par exemple 6 est un nombre parfait).
6. Montrer que les nombres parfaits pairs sont les nombres d'Euclide ; à savoir les entiers de la forme $E_k = 2^k(2^{k+1} - 1)$ où $k \in \mathbb{N}^*$ avec $2^{k+1} - 1$ premier.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\varepsilon}{k} - \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right)\right) \leqslant \varepsilon^2$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\ln(\Gamma(1+\varepsilon))}{\varepsilon} = -\gamma$.

(d) Montrer alors que Γ est dérivable en 1 et donner $\Gamma'(1)$.

Partie 3 : Retour sur l'expression intégrale de Γ

10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant e^{-\frac{t}{n}} - \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{2n^2}$.

11. Montrer que si $a > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ telle que $n \geqslant a$ on a :

$$\forall x \geqslant 1, \left|\int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt - \int_0^a t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt\right| \leqslant \frac{a^{x+2}}{2n(x+2)}.$$

12. Motrer que :$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in]0, n]$, on a : $\int_a^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \leqslant Me^{-\frac{a}{2}}$.

13. En déduire que $\forall a > 0, \left|\int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt - \Gamma(x)\right| \leqslant Me^{-\frac{a}{2}}$.

14. Conclure que $\Gamma(x) = \lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} \int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt$ qui sera notée $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

15. Sachant que $\lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} \int_0^a e^{-t^2}dt \underset{\text{notée}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss). Calculer $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$.