AZ-C.P.G.E
CENTRE AL ZAHRAWI
CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ÉCOLES

C.P.G.E
CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ECOLES ABULCASIS

CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE MPSI

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Les candidats sont informés que la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Exercice 1 Autour des matrices conjuguées dans $SL_2(\mathbb{K})$

On se donne un corps $\mathbb{K}$ *commutatif.*

■ *On définit l'ensemble* $SL_2(\mathbb{K}) = \{M \in M_2(\mathbb{K}) \mid det(M) = 1\}$.

■ *deux matrices* $A, B \in M_2(\mathbb{K})$ *sont dites conjuguées dans* $SL_2(\mathbb{K})$, *s'il existe* $P \in SL_2(\mathbb{K})$ *tel que* $A = P^{-1}BP$.

► **Partie 1 :**

1. Déterminer l'ensemble des couples $(b, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 2 & d \end{pmatrix}$ soit dans $SL_2(\mathbb{Z})$.
2. Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1-2y & y-3 \end{pmatrix}$ soit dans $SL_2(\mathbb{Z})$.
3. Soit (a, d) donné dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   (a) On suppose que (a, d) est distinct des couples $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. L'ensemble des couples $(b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit dans $SL_2(\mathbb{Z})$ est-il non vide ? est-il infini ?
   (b) Même question lorsque (a, d) est l'un des couples $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

► **Partie 2 :**

On considère $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Montrer que les deux matrices A et B sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{K})$ si, et seulement si, λ est un carré dans $\mathbb{K}$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient conjuguées dans $SL_2(\mathbb{K})$ dans les cas : • $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, • $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
6. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}$ les deux matrices A et B sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.
7. Donner les valeurs de $\lambda \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ pour lequelles A et B soient cojuguées dans $SL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$.
8. Montrer que si λ, μ sont des carrés dans $\mathbb{K}$, alors les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{K})$.

Exercice 2 Autour des entiers d'Eisenstein

On note

$$\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad \text{où} \quad j = e^{i2\pi/3}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est anneau commutatif intègre et unitaire.
2. Représenter l'élément $z = a + jb$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $N(z) = z\overline{z}$.
   (a) Calculer pour $u = a + jb \in \mathbb{Z}[j]$, $N(u)$ en fonction de a et b.
   (b) Montrer que pour $u \in \mathbb{Z}[j]$, u est inversible si, et seulement si, $N(u) = 1$.

4. Conclure que les inversibles de $\mathbb{Z}[j]$ sont exactement les racines sixième de l'unité, à savoir $\mathbb{U}_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\}$.
5. (a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $z = x + jy$.
   (b) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \exists \alpha \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $N(z-\alpha) < 1$.
   (c) Y'a-il unicité de α ?
6. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[j]$ avec $z_2 \neq 0$. Montrer l'existence de $(q,r) \in \mathbb{Z}[j] \times \mathbb{Z}[j]$ tels que
$$z_1 = z_2 q + r \quad \text{et} \quad N(r) < N(z_2).$$
7. Le couple (q,r) précédent est-il unique ?

Une partie I de $\mathbb{Z}[j]$ est dite un idéal de $\mathbb{Z}[j]$ si
$$\begin{cases} I \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{Z}[j],+); \\ \forall u \in \mathbb{Z}[j], \forall z \in I, \ uz \in I. \end{cases}$$

Soit I un idéal de $\mathbb{Z}[j] \neq \{0\}$, on considère l'ensemble $A = \{N(z) \mid z \in I \setminus \{0\}\}$ et on pose $\beta \in I \setminus \{0\}$ tel que $N(\beta)$ soit le plus petit élément de A.

8. Montrer que $I = \beta\mathbb{Z}[j] = \{\beta q \mid q \in \mathbb{Z}[j]\}$.

Problème **Dérivation sous le signe intégral**

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une application k-fois dérivable sur J. On note
$$f^{(0)} = f, \text{ et } \forall i = 0,1,\ldots,k-1, \quad f^{(i+1)} = (f^{(i)})' = (f')^{(i)}$$

■ Une application $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^k, si toutes ses dérivées d'ordre inférieure ou égale à k existent et $f^{(k)}$ est continue sur J.

■ $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^∞ si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

■ On admet le théorème suivant connu sous le nom du théorème de Heine :

Si f est continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors elle est uniformément continue sur $[a,b]$, c'est à dire
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x,y \in [a,b], \ |x-y| \leqslant \alpha \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

■ On admet que toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée.

► **Préliminaires**

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ et $x \in]a,b]$, on définit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par
$$\forall t \in [a,b], \ g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - A(x-t)^2$$
où A est une constante réelle qui satisfait à l'égalité $g(a) = 0$.

1. Justifier que g est de classe C^1.

2. Montrer $\exists c \in]a,x[$ tel que $g'(c)=0$.
3. En déduire que $\forall x \in [a,b]$, $\exists c \in [a,x]$ tel que $f(x) = f(a) + f'(x)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$, formule dite de Taylor-Lagrange.

► **Partie I :**

Dans cette partie f et g désignent deux applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ non nulles. On se propose d'étudier la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^1 f(xu)g(u)du \end{array}$$

4. Justifier que F est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
5. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On note $I = [-|x_0|-1, |x_0|+1]$ et on considère pour $h \in [-1,1]$, le réel positif $\Delta_h = \int_0^1 |f(x_0u+hu) - f(x_0u)|du$
   i. Vérifier que $\forall h \in [-1,1], \forall u \in [0,1]$, on a $x_0u \in I$ et $x_0u + hu \in I$.
   ii. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. En utilsant le théorème de Heine, montrer que
   $$\exists \alpha > 0,\ \forall h \in [-\alpha, \alpha],\ \Delta_h \leqslant \varepsilon$$
   (b) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
6. On suppose dans cette question que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On note $I = [-|x_0|-1, |x_0|+1]$.
   i. Justifier l'existence de M_1, M_2 positifs tels que $\forall t \in I,\ |f''(t)| \leqslant M_1$ et $|g(t)| \leqslant M_2$.
   ii. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que
   $$\forall h \in [-1,1],\ \left| F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 uf'(x_0u)g(u)du \right| \leqslant \frac{h^2 M_1 M_2}{6}$$
   iii. En déduire que F est dérivable en x_0 en donnant une expression de $F'(x_0)$.
   (b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (c) Dans cette question, on suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   En faisant une récurrence , établir que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, F^{(p)}(x) = \int_0^1 u^p f^{(p)}(xu)g(u)du$$

► **Partie II :**

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ et $T(x) = h(x^2)$.

7. Calculer $h(0)$, $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.
8. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ T'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt$.
9. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ T(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.
10. Conclure que $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Rectifications :

EXERCICE 1

On se donne un **anneau** IK (au lieu de « un corps IK »)

Question 6 : **Déterminer** λ (au lieu de « montrer que $\forall\lambda$ »)