ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

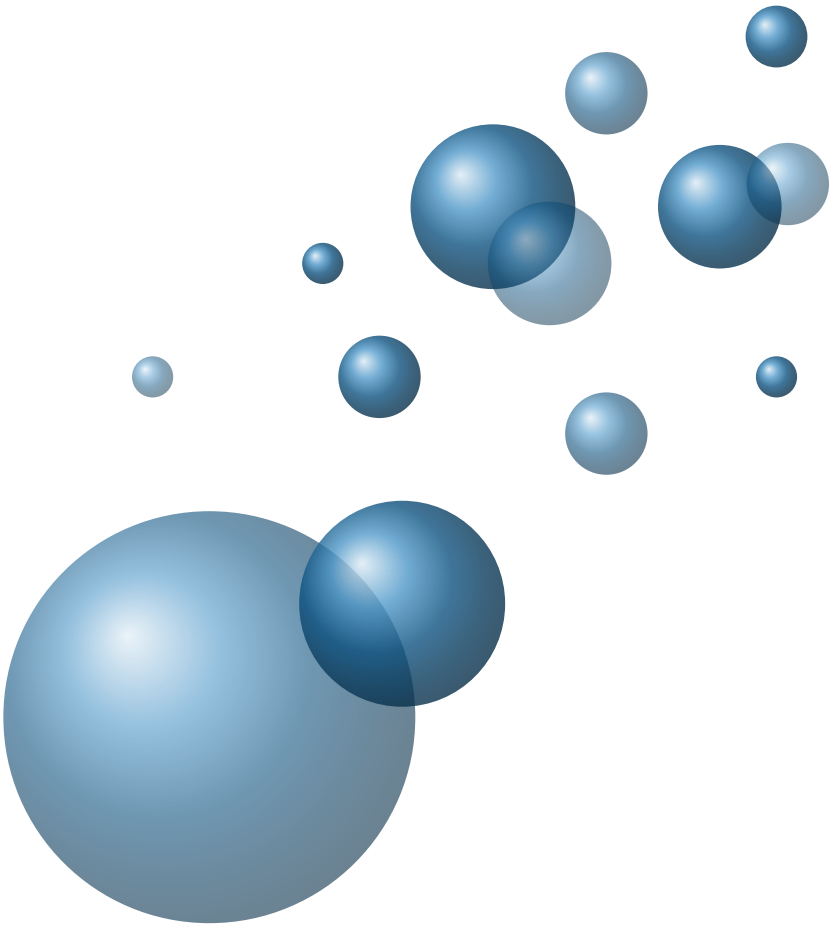
AZ-C.P.G.E
CENTRE AL ZAHRAWI
CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ÉCOLES

3.14
15926
53589
79323
84626
43383
27950

C . P . G . E
CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ECOLES ABULCASIS

CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE MPSI

DURÉE 4 H



A - Méthode de Newton

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable avec f'' continue sur $[a, b]$.
On suppose que :

- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$;
- $\forall x \in [a, b],\ f'(x) < 0$;
- $\forall x \in [a, b],\ f''(x) > 0$.

Partie I. Étude d'une fonction.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$, que l'on notera **c** .
2. Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer le point d'intersection, de la tangente à la courbe de f au point x_0 avec l'axe des abscisses.
   On introduit la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [a, b], g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
3. Montrer que g est dérivable et que g' est continue sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée.
4. Étudier les variations de g.
5. On admet l'existence d'un couple (m, M) de réels strictement positifs tels que
   $$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geqslant m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leqslant M.$$
   En appliquant successivement le théorème des accroissements finis à f et à f', montrer l'existence d'un réel $L > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], |g(x) - c| \leqslant L.|x - c|^2$.

Partie II. Étude d'une suite.

Soit $(u_n)_n$ la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

6. Montrez que la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par c.
7. Montrez que la suite $(u_n)_n$ converge vers c.
8. À l'aide de la question $5.$, montrez qu'il existe $k > 0$ tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - c| \leqslant k \left(\frac{c - a}{k}\right)^{2^n}.$$

B - Tout premier de la forme $4m + 1$ est somme de deux carrés

On se propose de montrer que pour tout nombre p premier de la forme $4m + 1$; il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$.
Soit $S = \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid x^2 + 4yz = p\}$ et considérons les ensembles

$$S_1 = S \cap \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid x < y - z\}$$
$$S_2 = S \cap \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid y - z < x < 2y\}$$
$$S_3 = S \cap \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid 2y < x\}$$

1. Justifier que S est un ensemble fini.
2. Montrer que si $y, z \in \mathbb{N}^*$, alors $(y - z, y, z) \notin S$ et $(2y, y, z) \notin S$.
3. En déduire que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Considérons l'application f définie sur S par :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z); & \text{si } (x,y,z) \in S_1 \\ (2y-x, y, x-y+z); & \text{si } (x,y,z) \in S_2 \\ (x-2y, x-y+z, y); & \text{si } (x,y,z) \in S_3 \end{cases}$$

On dit que f admet un point fixe dans S, si $\exists (x_0,y_0,z_0) \in S$ tel que $f(x_0,y_0,z_0) = (x_0,y_0,z_0)$.

4. Montrer les inclusions

$$f(S_1) \subset S_3,\ f(S_2) \subset S_2\ f(S_3) \subset S_1.$$

5. En déduire que $f(S) \subset S$.
6. Vérifier que $\forall (x,y,z) \in S,\ f(f(x,y,z)) = (x,y,z)$.
7. Justifier les égalités
$$f(S) = S, f(S_1) = S_3, f(S_2) = S_2, f(S_3) = S_1$$
8. f peut-elle avoir un point fixe dans S_1 ? dans S_3 ? Justifier votre réponse.
9. Montrer que f admet un unique point fixe sur S qu'en déterminera.
10. En déduire que le cardinal de S est impair.
11. On considère l'application $g : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,z,y) \end{array}$.
    (a) Justifier que $\forall (x,y,z) \in S,\ g(g(x,y,z)) = (x,y,z)$ et que g possède au moins un point fixe dans S.
    (b) en déduire finalement que p s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers naturels.
12. On se propose de montrer que la décomposition $p = a^2 + b^2$ est unique, à interversion près de a et b.
    Supposons que $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ où $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Montrer que $(ad-bc)(ad+bc) \equiv 0\ [p]$, puis que $p|ad-bc$ ou $p|ad+bc$.
    (b) On suppose que $p|ad-bc$.
        i. Vérifier que $p^2 = (ad-bc)^2 + (ac+bd)^2$.
        ii. En déduire que $a = c$ et $b = d$.
    (c) On suppose que $p|ad+bc$.
        i. Vérifier que $p^2 = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2$.
        ii. En déduire que $a = d$ et $b = c$.

C - Une dérivation sous le signe intégral et intégrale de Gauss

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} exp\left(\frac{-x}{\cos^2(t)}\right) dt.$$

et F l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du.$$

En admettant que F admet une limite réelle en $+\infty$, on se propose de calculer cette limite.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
2. (a) Montrer par récurrence que pour $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^u (u-t)^n e^t dt.$$

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R},\ \left| e^u - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|u|}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On pose

$$\Delta(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)} exp\left(\frac{-x}{\cos^2(t)}\right) dt.$$

Transformer l'expression de $\Delta(h)$, puis majorer $|\Delta(h)|$.

(b) Vérifier que $\forall h \in \mathbb{R}^*, \forall t \in [0, \frac{\pi}{4}], |h| \leqslant \frac{|h|}{\cos^2(t)} \leqslant 2|h|$.

(c) En déduire que f est dérivable en x et que

$$f'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)} exp\left(\frac{-x}{\cos^2(t)}\right) dt.$$

4. À l'aide d'un encadrement de f, montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
5. Soit x un réel. Déterminer une expression de $F(x)$ en effectuant le changement de variable $u = x.\tan(t)$.
6. On définit l'application g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x^2)$.

(a) Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $g'(x)$ en fonction de $F(x)$.

(b) En déduire une expression de g à l'aide de F^2.

(c) Déduire des questions précédentes que F tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en $+\infty$.

D - Générateurs du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$

Soit $SL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de déterminant 1.

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}$$

On considère les deux matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On se propose de montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ est produit de matrices appartenant à $\{S, T, T^{-1}\}$, c'est à dire produit des matrices S, T et T^{-1}. On note cet ensemble $< S, T >$.

1. Calculer S^2 et montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que si $M \in < S, T >$, alors $-M \in < S, T >$.

   Soit alors $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

   Quitte à remplacer M par $-M$, on peut supposer que $c \in \mathbb{N}$.

   On va établir le résultat souhaité par récurrence sur $c \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que $c = 0$.

(a) Montrer que M est de l'une des formes $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

(b) En déduire que dans les deux cas, $M \in < S, T >$.

4. On suppose l'hypothèse de récurrence : Toute matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $0 < z \leqslant c-1$ est dans $< S, T >$.

   On fait la division euclidienne de a par c, $a = qc + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r < c$.

(a) Vérifier que $ST^{-q}M = \begin{pmatrix} u & v \\ r & w \end{pmatrix}$ où u, v, w à déterminer.

(b) Appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure que $M \in < S, T >$.