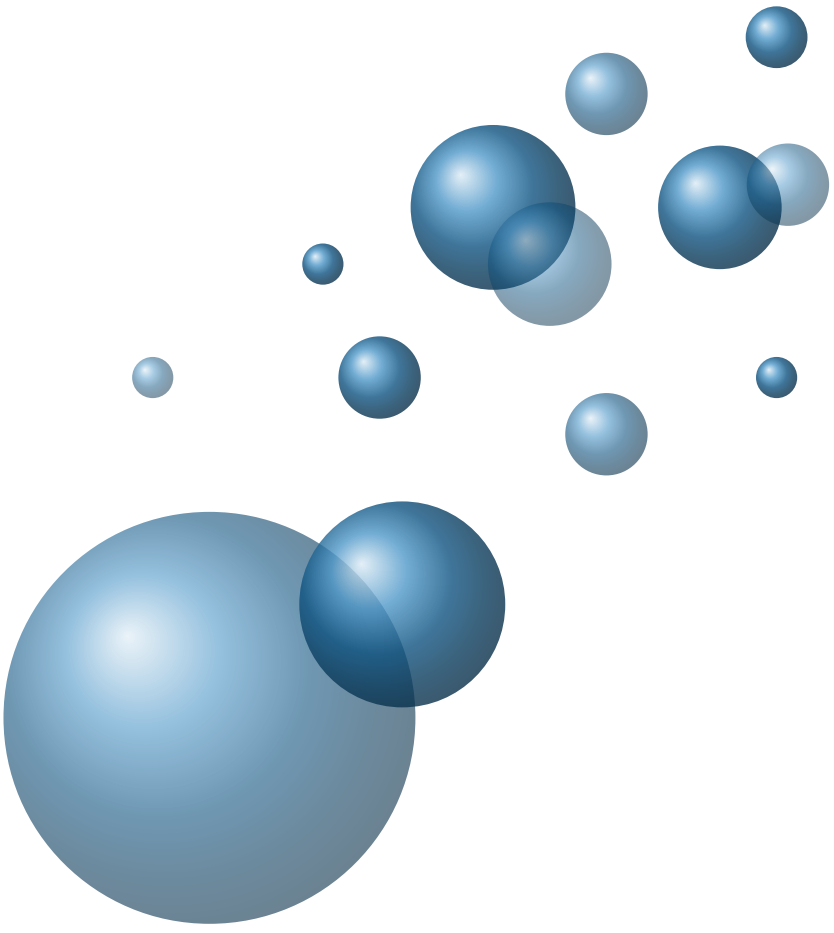
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

AZ-C.P.G.E
CENTRE AL ZAHRAWI
CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ÉCOLES

# CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE MPSI

DURÉE 3 H



## EXERCICE 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue .

Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+\pi} f(u)cos(u-x)du$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \int_x^{x+\pi} f(u)sin(u-x)du - f(x+\pi) - f(x).$$

## EXERCICE 2

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $g''$ continue.

1. Montrer que $\quad \forall a, x \in \mathbb{R}$

$$\int_a^x (x-t)g''(t)dt = g(x) - g(a) - (x-a)g'(a)$$

Considérons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt \text{ et } \psi(x) = \int_0^1 tf(t)\cos(xt)dt$$

2. (a) Montrer que $\forall u, v \in \mathbb{R},\ |\sin(u) - \sin(v)| \leq |u-v|$.
   (b) En déduire que $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que $\forall u, v \in \mathbb{R},\ |\sin(u) - \sin(v) - (u-v)\cos(v)| \leq \dfrac{(u-v)^2}{2}$.
   (b) En déduire que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\varphi' = \psi$.

## EXERCICE 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

L'objectif de cet exercice est de trouver deux matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité.

Pour une matrice carrée $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, les colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ sont appelées respectivement la première et la deuxième colonne de $C$. Le déterminant de $C$ est le nombre noté $\det(C) = \alpha\delta - \gamma\beta$.

1. Soit $x$ un nombre réel. Déterminer $Q(x) = \det(xI_2 - A)$.
2. Donner $x_1$, $x_2$ les racines de $Q(x)$; tels que : $x_1 < x_2$.
3. Calculer $X_1 = A - x_1 I_2$ et $X_2 = A - x_2 I_2$, puis trouver deux matrices colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ non nulles, où $\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$ sont des entiers naturels, telles que $X_1 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. On décide alors de former la matrice $P$ à l'aide des deux matrices colonnes $C_1$ et $C_2$ , puis de former la matrice diagonale $D$ à l'aide de $x_1$ et $x_2$ trouvés précédemment.
   (a) Calculer $P^2 - (\alpha + \delta)P$.
   (b) En déduire $P^{-1}$, l'inverse de la matrice $P$.
   (c) Vérifier que $PDP^{-1} = A$.
5. Montrer par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 1$.
6. En déduire une expression de $A^n$, pour $n \geq 1$.

## EXERCICE 4

On considère un entier $n \geq 2$ et un nombre premier $p$. Pour tout entier $k \geq 0$, on considère les sous-ensembles finis $\mathrm{U}_k$ et $\Omega_k$ de $\mathbb{N}$ définis par

$$\mathrm{U}_k = \{a \in [[1,n]] \ \text{ tq } \ p^k \text{ divise } a\}$$
$$\Omega_k = \{a \in [[1,n]] \ \text{ tq } \ v_p(a) = k\}$$

où $[[1,n]]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.
On désigne par $v_p(a) = \max\{k \in \mathbb{N} \ / \ p^k \text{divise } \ a\}$, en particulier si $p$ ne divise pas $a$, alors $v_p(a) = 0$.

1. Déterminer $m = \sup\{k \in \mathbb{N} \ / \ p^k \leq n\}$ en fonction de $n$ et $p$.
2. (a) Montrer que, pour tout $k \in [[0, m]]$, l'ensemble $\mathrm{U}_{k+1}$ est strictement inclus dans $\mathrm{U}_k$ et que pour $k > m$ on a, $U_k = \emptyset$.
   (b) Prouver que les parties $\Omega_0, \ldots, \Omega_m$ vérifient : $\forall i, j \in [[0, m]]$ tels que $i \neq j,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ et $\Omega_0 \cup ... \cup \Omega_m = [[1, n]]$.
3. (a) Pour tout $k \geq 0$, établir que $\Omega_k = \mathrm{U}_k \setminus \mathrm{U}_{k+1}$.
   (b) Calculer, pour tout $k \geq 0, Card(\mathrm{U}_k)$, puis $Card(\Omega_k)$ en fonction de $n, p$.
4. Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{m} k.Card(\Omega_k)$ et en déduire la formule de Legendre.

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

où pour tout $k \geq 1$, $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{p^k}$.

## PROBLÈME

**Partie 1 :**

1. Soient $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $u < v$.
   (a) Montrer que $\exists\ q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q} < v - u$.
   (b) En déduire que $\exists\ r \in Q$ tel que $u < r < v$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, Montrer que $\exists\,(r_n)_n$ une suite de rationnelles telle que : $r_n \to x$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $0$ et vérifiant $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
   (a) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\forall\ r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$.
   (c) Conclure que $f(x) = x \cdot f(1) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue non nulle telle que $\forall\ x, y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) = f(x)f(y)$.
   (a) Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
   (b) En posant $g(x) = \ln(f(x))$, montrer que $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = e^{\lambda x}$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue non nulle telle que $\forall\ x, y \in \mathbb{R} \quad f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y)$.
   (a) Montrer que si $f$ est non nulle, alors $f > 0$.
   (b) En considérant la fonction $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(\sqrt{x})$ déterminer l'expression de $f$.
6. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+,\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$.
   (On pourra commencer par considérer la fonction $g : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$).

**Partie 2 :**

Le but de cette partie est la recherche des fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, vérifiant pour tout réel $x$ la relation $f(2x) = 2\left(f(x)\right)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\frac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque $x$ tend vers 0 , que l'on notera $a$.

1. Justifier que tout $x$ de $[-1, 1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec $\theta$ dans $[0, \pi]$.
2. (a) Vérifier $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer, pour $\theta$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les relations : $\dfrac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leq 1 - \dfrac{\theta^2}{\pi}$.
3. Soit $f$ une fonction solution du problème.
   On se donne un réel $x$ et l'on pose, pour tout entier naturel $n$, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\theta_n\right)$, avec $\theta_n$ dans $[0, \pi]$.
   (a) Montrer que $f$ est continue en 0 et que $\lim\limits_{n \to \infty} \theta_n = 0$.
   (b) Vérifier l'existence d'un entier $N$ tel que pour $n \geq N$ on ait $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.
   Établir que $a$ est positif et que $f(x) = \cos(x\sqrt{2a})$.