Epreuve de mathématiques

Durée : 1heure.

Exercice1 :Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)} dt$
et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \int_1^{x} \frac{1}{ln(1+t^2)} dt$

1. Exprimer f en fonction de g
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :
$$\forall x > 0 \, , f'(x) = \frac{1}{ln(1+4x^2) ln(1+x^2)} ln \frac{(1+x^2)^2}{(1+4x^2)}$$
3. Montrer que :
$$\forall x > 0 \, , \frac{x}{ln(1+4x^2)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{ln(1+x^2)}$$
   (a) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en 0
   (b) En déduire que la courbe représentative de f présente au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique
4. Donner le tableau de variation de f
5. Donner l'allure de la courbe représentative de f

Exercice 2 :Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\pi(n)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égal à n
Le but de l'exercice et de trouver un majorant de $\pi(2^n)$
On pourra utiliser sans démonstration les résultas suivants :

- Si des nombres premiers deux à deux distincts divisent un entier n , alors leur produit divise n
- Si un entier n est premier avec chacun des entiers $a_1, ..., a_q$, alors n est premier avec leur produit $a_1 ... a_q$

Dans la suite :$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \, , p \leqslant n \, , C_n^p$ désigne l'entier $\frac{n!}{p!(n-p)!}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$C_{2n}^n \leqslant 2^{2n}$ (remarquer que $2^{2n} = (1+1)^{2n}$)
2. Soit p un nombre premier compris entre $n+1$ et $2n$
   Montrer que p divse C_{2n}^n(utiliser $C_{2n}^n = \frac{(n+1)(n+2)...2n}{n!}$)
3. En déduire que le produit des nombres premiers compris entre $n+1$ et $2n$ divise C_{2n}^n
4. En déduire que : $C_{2n}^n \geqslant n^{\pi(2n) - \pi(n)}$
5. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$:$\pi(2n) - \pi(n) \leqslant \frac{2nln2}{lnn}$
6. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$\pi(2^n) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k-1}$$